UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)

2do Parcial MODELO

MA-1111, MODELO II, Enero – Marzo 2007

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1.

a) Hallar

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-9x^2+27x+27}$$

b) Definir formalmente $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$

c) Hallar y representar las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{x^2+5x+5}{x+2}$$

d) Hallar $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-3x\right)$ (1 Pto c/u)

e) Hallar $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7x+12}{x-4}$

f) Hallar $\lim_{x\to 4}(x-4)sen\left(\frac{1}{x-4}\right)$

2. Hallar los siguientes limites:

a) Sean $\lim_{x\to 1} f(x)=4$ y $\lim_{x\to 4} g(x)=1$.

Hallar de ser posible $\lim_{x\to 4}(f\circ g)(x)$, $\lim_{x\to 1}(g+f)(x)$, $\lim_{x\to 1}(g\circ f)(x)$ y $\lim_{x\to 4}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ (4 Ptos)

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-9x^2+9x-1}{x-1}$$ (3 Ptos)

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(5x-\sqrt{x^2+x-1}\right)$ (3 Ptos)

d) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x}+x^2+1}{x^2+\sqrt[5]{x^4}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^4}}$$ (4 Ptos)

3. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & si\ \ x\le 1\\ x^2-1 & si\ \ 1<x\le 2\\ x^2 & si\ \ x>2\end{cases}$$ (6 Ptos)

4.

a) Enunciar el Teorema del emparedado (2 Ptos)

b) Mostrar que $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$ (2 Ptos)

1.

a) Hallar

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-9x^2+27x+27}$$

Solución:

$$\frac{3^2-9}{3^3-9.3^2+27.3+27}=\frac{0}{54}=0$$

b) Definir formalmente $\underset{x\to+\infty}{Lim} f(x)=L$

Solución:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists M>0,\ Tal\ que:$$
$$M<x\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

c) Hallar y representar las asíntotas de la función: $f(x)=\dfrac{x^2+5x+5}{x+2}$

Solución:

- Candidato a ser Asíntota vertical es la recta $x=-2$

  Como $(-2)^2+5(-2)+5=-1$ y $\begin{cases} x+2<0 & si \quad x<-2 \\ x+2>0 & si \quad x>-2 \end{cases}$

  Entonces: $\displaystyle\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2+5x+5}{x+2}=+\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2+5x+5}{x+2}=-\infty$

  Por lo tanto: $x=-2$ es una asíntota vertical.

- Asíntotas Oblicuas u Horizontales:

$$\frac{\left(\dfrac{x^2+5x+5}{x+2}\right)}{x}=\frac{x^2+5x+5}{x^2+2x}=\frac{\left(\dfrac{x^2+5x+5}{x^2}\right)}{\left(\dfrac{x^2+2x}{x^2}\right)}=\frac{1+5\dfrac{1}{x}+5\dfrac{1}{x^2}}{1+2\dfrac{1}{x}}$$

Luego: $$\underset{x\to+\infty}{Lim}\frac{\left(\dfrac{x^2+5x+5}{x+2}\right)}{x}=\underset{x\to+\infty}{Lim}\frac{1+5\dfrac{1}{x}+5\dfrac{1}{x^2}}{1+2\dfrac{1}{x}}=1$$

Además, $\dfrac{x^2+5x+5}{x+2}-x=\dfrac{x^2+5x+5-x^2-2x}{x+2}=\dfrac{3x+5}{x+2}=\dfrac{\left(\dfrac{3x+5}{x}\right)}{\left(\dfrac{x+2}{x}\right)}=\dfrac{3+5\frac{1}{x}}{1+2\frac{1}{x}}$

Luego: $\underset{x\to+\infty}{Lim}\left(\dfrac{x^2+5x+5}{x+2}-x\right)=\underset{x\to+\infty}{Lim}\left(\dfrac{3+5\frac{1}{x}}{1+2\frac{1}{x}}\right)=3$

En consecuencia existe una asíntota oblicua hacia $+\infty$, de ecuación: $y=x+3$ y

no existen asíntotas horizontales, ya que $\underset{x\to+\infty}{Lim}\left(\dfrac{x^2+5x+5}{x+2}\right)=+\infty$

Como los cálculos algebraicos no se alteran por que el valor de x sea negativo o positivo, entonces existe una asíntota oblicua hacia $-\infty$, de misma ecuación: $y=x+3$

d) Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-3x$

Solución:

$$\sqrt{x^2-1}-3x=\left(\sqrt{x^2-1}-3x\right)\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+3x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+3x\right)}=\frac{x^2-1-9x^2}{\sqrt{x^2-1}+3x}=\frac{-8x^2-1}{\sqrt{x^2-1}+3x}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{-8x^2-1}{x^2}\right)}{\left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}+3x}{x^2}\right)}=\frac{-8-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}+3\dfrac{1}{x}}$$

Como: $\underset{x\to+\infty}{Lim}-8-\dfrac{1}{x^2}=-8$ y $\underset{x\to+\infty}{Lim}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}+3\dfrac{1}{x}=0$, llegando a 0 con valores

siempre positivos, ya que la expresión $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}$ tiene sentido cuando x tiende a $+\infty$,

es decir:

$$1<x\Leftrightarrow 1<x<x^2\Leftrightarrow 1<x<x^2<x^3\Leftrightarrow 1<x<x^2<x^3<x^4\Rightarrow\frac{1}{x^4}<\frac{1}{x^2}\Rightarrow 0<\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)$$

entonces $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-3x = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-8-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1+3\dfrac{1}{x}}} = -\infty$

e) Hallar $\lim_{x\to4} \dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$

Solución:

$$\frac{x^2-7x+12}{x-4} = \frac{(x-3)(x-4)}{x-4} = x-3$$

Entonces: $\displaystyle Lim_{x\to4} \frac{x^2-7x+12}{x-4} = 1$

f) Hallar $\lim_{x\to4} (x-4)sen\left(\dfrac{1}{x-4}\right)$

Solución:

$$\left|(x-4)sen\left(\frac{1}{x-4}\right)\right| = |x-4|\left|sen\left(\frac{1}{x-4}\right)\right|$$

Como: $\left|sen\left(\dfrac{1}{x-4}\right)\right| \le 1$, se obtiene; $\left|(x-4)sen\left(\dfrac{1}{x-4}\right)\right| \le |x-4|$

Por lo tanto: $-|x-4| \le (x-4)sen\left(\dfrac{1}{x-4}\right) \le |x-4|$

Como $Lim_{x\to4} -|x-4| = Lim_{x\to4} |x-4| = 0$, entonces por el teorema del emparedado

$$\lim_{x\to4} (x-1)sen\left(\frac{1}{x-4}\right) = 0$$

2. Hallar los siguientes limites:
   a) Sean $\lim_{x\to1} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to4} g(x) = 1$.

   Hallar de ser posible $\lim_{x\to4} (f\circ g)(x)$, $\lim_{x\to1} (g+f)(x)$, $\lim_{x\to1} (g\circ f)(x)$ y $\lim_{x\to4} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

   Solución:

   - $\lim_{x\to4} (f\circ g)(x) = \lim_{x\to4} f(g(x)) = \lim_{g(x)\to1} f(g(x)) = \lim_{y\to1} f(y) = 4$

- $\lim\limits_{x\to 1}(g+f)(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) + \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, no es posible hallarlo , ya que no se conoce $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to 1}(g \circ f)(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(f(x)) = \lim\limits_{f(x)\to 4} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to 4} g(y) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to 4} f(x)}{\lim\limits_{x\to 4} g(x)}$, no es posible hallarlo, ya que no se conoce $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ y no poseemos mas información sobre las funciones.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-9x^2-9x+9}{x-1}$

Solución:

$$\frac{x^3-9x^2+9x-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2-8x+1)}{x-1} = x^2-8x+1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-9x^2+9x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2-8x+1) = 1^2-8.1+1 = -6$$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(5x-\sqrt{x^2+x-1}\right)$

Solución:

$$5x-\sqrt{x^2+x-1} = \left(5x-\sqrt{x^2+x-1}\right)\frac{5x+\sqrt{x^2+x-1}}{5x+\sqrt{x^2+x-1}} = \frac{25x^2-(x^2+x-1)}{5x+\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$= \frac{25x^2-x^2-x+1}{5x+\sqrt{x^2+x-1}} = \frac{24x^2-x+1}{5x+\sqrt{x^2+x-1}} = \frac{\left(\dfrac{24x^2-x+1}{x^2}\right)}{\left(\dfrac{5x+\sqrt{x^2+x-1}}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{24-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{5}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}}$$

Como $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(24-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=24$ y $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}\right)=0$, este último llegando 0 con valores positivos, se obtiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5x-\sqrt{x^2+x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{24-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}}\right)=+\infty$$

d) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x}+x^2+1}{x^2+\sqrt[5]{x^4}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^4}}$

Solución:

$$\frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x}+x^2+1}{x^2+\sqrt[5]{x^4}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^4}}=\frac{x^{5/4}+x^4+x^{1/2}+x^2+1}{x^2+x^{5/4}+x^{3/2}+x^2}=\frac{x^{5/4}+x^4+x^{1/2}+x^2+1}{2x^2+x^{5/4}+x^{3/2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{x^{5/4}+x^4+x^{1/2}+x^2+1}{x^2}\right)}{\left(\frac{2x^2+x^{5/4}+x^{3/2}}{x^2}\right)}=\frac{\frac{1}{x^{3/4}}+x^2+\frac{1}{x^{3/2}}+1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^{3/4}}+\frac{1}{x^{1/2}}}$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{3/4}}+x^2+\frac{1}{x^{3/2}}+1+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x^{3/4}}+\frac{1}{x^{1/2}}\right)=2,$$

Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x}+x^2+1}{x^2+\sqrt[5]{x^4}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^{3/4}}+x^2+\frac{1}{x^{3/2}}+1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^{3/4}}+\frac{1}{x^{1/2}}}=+\infty$$

3. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x\le 1\\ x^2-1 & si \quad 1<x\le 2\\ x^2 & si \quad x>2\end{cases}$$

Solución:

- $f(x)$ es continua en $(-\infty,1)$, ya que es un polinomio en ese intervalo

- $f(x)$ es continua en $(1,2)$, ya que es un polinomio en ese intervalo
- $f(x)$ es continua en $(2,+\infty)$, ya que es un polinomio en ese intervalo
- Estudiamos la continuidad en los puntos $x=1$ y $x=2$
  - Punto $x=1$

    $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x-1) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1) = 0$,

    luego: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

    y como $f(1) = 0 = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ entonces f es continua en 1.

  - Punto $x=2$

    $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-1) = 3$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x^2 = 4$,

    luego: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y en consecuencia $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe

    Por lo tanto, f no es continua en 2.

  Así, se puede afirmar que: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

4.

a) Enunciar el Teorema del emparedado

Solución:

Sean $f(x), g(x)$ y $h(x)$ funciones definidas en un intervalo $[a,b]$ que contiene al punto c.

Si las funciones satisfacen $f(x) \le g(x) \le h(x)$ y $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$,

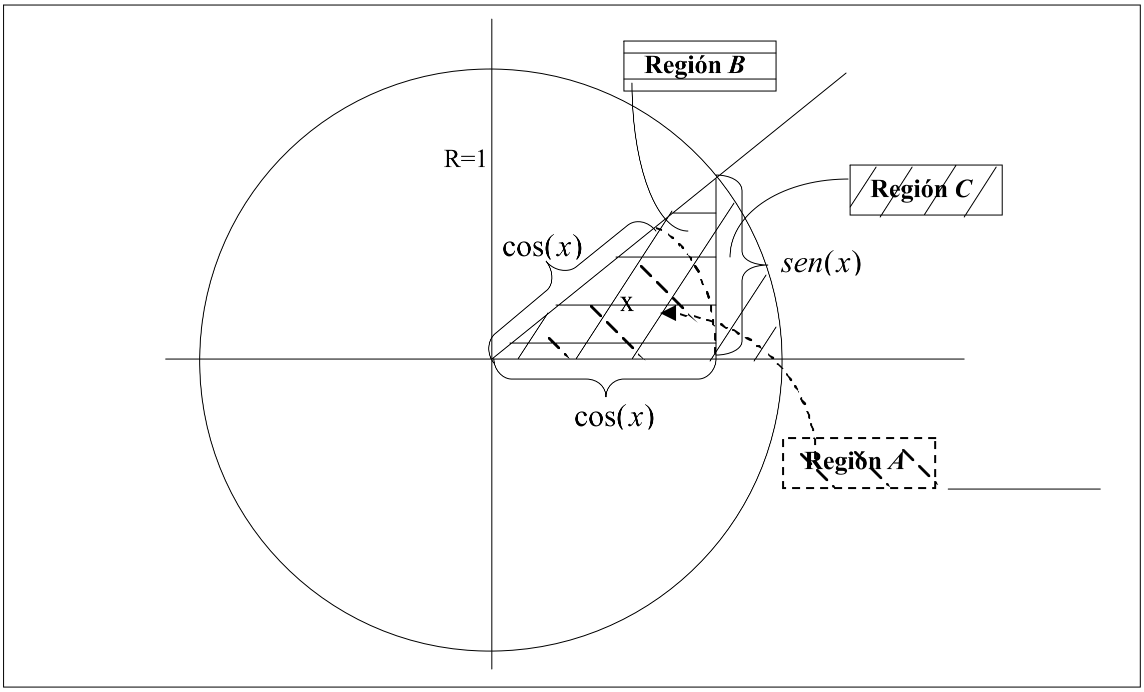
entonces $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$

b) Mostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1$

Solución:

Se utilizara el teorema del emparedado.

2do Parcial MODELO



Por geometría se tiene: $área(A) \le área(B) \le área(C)$,
Recordando que el área de una sección de ángulo α en un disco de radio r es:
$área = \frac{\alpha}{2} r^2$, se obtiene:

$$área(A) = \frac{x}{2}\cos^2(x), \quad área(B) = \frac{\cos(x)sen(x)}{2} \quad \text{y} \quad área(C) = \frac{x}{2}.1^2$$

Luego: $\frac{x}{2}\cos^2(x) \le \frac{\cos(x)sen(x)}{2} \le \frac{x}{2}$ y dividiendo la expresión por $\frac{x\cos(x)}{2}$ que es positiva,

se obtiene: $\cos(x) \le \frac{sen(x)}{x} \le \frac{1}{\cos(x)}$

la cual es valida para $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, según la figura.

Para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, se procede de la misma forma y obtenemos la misma desigualdad solamente que en el lugar de x aparece $-x$, es decir:

$$\frac{-x}{2}\cos^2(-x) \le \frac{\cos(-x)sen(-x)}{2} \le \frac{-x}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \le \frac{\cos(x)sen(x)}{2} \le \frac{x}{2}\cos^2(x) \text{ y}$$

dividiendo la expresión por $\frac{x\cos(x)}{2}$ que es negativo, se obtiene:

$$\cos(x) \le \frac{sen(x)}{x} \le \frac{1}{\cos(x)}$$

Por lo tanto se puede afirmar que:

Si $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces $\cos(x) \le \frac{sen(x)}{x} \le \frac{1}{\cos(x)}$

Como $\underset{x\to 0}{Lim}\cos(x) = \underset{x\to 0}{Lim}\frac{1}{\cos(x)} = 1$, entonces por el teorema del emparedado

$$\underset{x\to 0}{Lim}\frac{sen(x)}{x} = 1$$